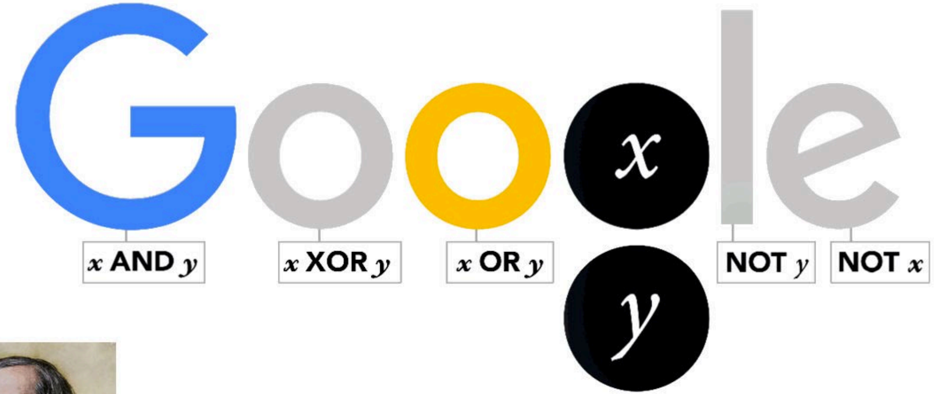
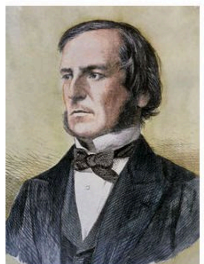




George Boole's 200th Birthday

PARTE VIII: L'algebra di Boole

Logica e ragionamenti

La logica nasce come disciplina che studia i principi e le regole del ragionamento, ne valuta la correttezza e ne formalizza l'uso.

Fin dall'antichità la logica è stata molto studiata: nella Grecia classica il più famoso e importante pensatore che si è dedicato alla logica fu Aristotele (384 ac-322 ac).

Le regole di inferenza logica, cioè le regole per cui date alcune premesse è possibile raggiungere una conclusione, sono considerate evidenti di per sé, sono considerate valide e sono presenti naturalmente nel nostro modo di ragionare.

Un po' di storia della Logica

Uno degli aspetti più interessanti è dato dai cosiddetti **paradossi** (parà + doxa = contro l'opinione comune) e **antinomie** (anti + nomos = contro la legge) logiche, frasi dotate di significato se considerate dal punto di vista esclusivamente linguistico, ma che dal punto di vista logico risultano contraddittorie.

Attorno al VI secolo a.C. nacquero i due processi principali su cui si basa l'organizzazione logica della matematica: l'**astrazione** (ricavare una regola generale dall'osservazione di fenomeni particolari diversi) e la **deduzione** (partendo da alcune premesse, ricavare una conclusione coerente con le assunzioni del ragionamento).

Nel IV secolo a.C., Aristotele codifica le leggi del ragionamento logico, mentre Euclide organizza negli *Elementi* i teoremi di geometria e di teoria dei numeri ottenuti dalla cultura matematica greca dell'epoca. Procede per definizioni, postulati e teoremi con una esposizione che è rimasta classica per ogni tempo, punto di riferimento per ogni teoria.

Continua: Logica e Matematica

In tempi pressoché contemporanei ad Aristotele, la logica esce dal contesto della retorica e inizia a essere utilizzata in maniera rigorosa anche in matematica, in particolare in geometria, con Euclide di Alessandria (365 AC - 300 AC), il quale, nei suoi “Elementi”, espone e tratta in maniera rigorosa la geometria piana, partendo da postulati geometrici, che lui considera evidenti e giustificati dalla realtà sensibile, e da assiomi (che chiama "nozioni comuni"), che sono regole considerate evidenti e basate sul ragionamento logico.

A partire dai postulati, Euclide dimostra i teoremi utilizzando le regole di inferenza logica, fornendo un grande esempio d'uso della logica in matematica.

Logica Matematica

La Matematica è sempre stata considerata genericamente come la

"Scienza dei Numeri"…

Una simile definizione è parziale, anche riferita solo al Medioevo, durante il quale la Matematica era insegnata nelle Università come *arte liberale*. Nelle facoltà di Filosofia, infatti, venivano apprese le arti del *Trivio* (complesso delle discipline letterali, costituito da Grammatica, Retorica, Logica) e del *Quadrivio* (complesso delle discipline scientifiche, costituito dalla matematica "pura": Aritmetica e Geometria, e dalla matematica "mista": Musica e Astronomia, viste come loro rispettive applicazioni). Tale facoltà era la più importante per il numero di studenti che la frequentavano, e che dopo aver concluso i corsi potevano proseguire gli studi in una delle altre tre facoltà (Teologia, Diritto, Medicina)…

LOGICA MATEMATICA: I ragionamenti logici vengono formalizzati in modo da poter essere "calcolati", utilizzando un linguaggio formale, che permetta un perfetto controllo delle dimostrazioni. Così tra la fine del XIX e l'inizio del XX secolo la logica diventa lo strumento per lo sviluppo rigoroso e formale della matematica.

Vero … o solo logicamente valido?

Inoltre il rapporto sempre più stretto tra logica e matematica produce risultati inaspettati:

viene compresa la differenza tra verità e validità logica. Per secoli i matematici hanno pensato che le teorie matematiche e in particolare la geometria rappresentassero verità assolute e che fosse loro compito scoprirle. La nascita delle geometrie non-euclidee (a cui i matematici giungono nell'Ottocento dopo secoli di studi sul V postulato euclideo) fa comprendere che la scelta degli assiomi può essere del tutto arbitraria (purché non portino a contraddizioni) e che ciò che si deriva da essi è da considerarsi "logicamente valido" e non più "vero" in senso assoluto.

Ciò che gli assiomi predicano può essere contrario a ciò che suggerisce l'esperienza, ma ciò che è possibile dimostrare a partire da essi risulta in ogni caso logicamente valido, per cui non esiste più una teoria "vera", che costringa le altre a essere "false". Di conseguenza è possibile creare diverse teorie non equivalenti ma tutte ugualmente coerenti, e allora il problema principale della logica, cambia natura e consiste nello sviluppare una teoria assicurandone la coerenza. Per coerenza (consistenza) si intende il fatto che all'interno di tale teoria non è possibile dimostrare un teorema e la sua negazione.

Paradosso di Russell – indovinelli e giochi

All'inizio del ventesimo secolo la logica viene usata per dare fondamento alla teoria intuitiva degli insiemi da Georg Cantor e Gottlob Frege.

Proprio da questa prima formalizzazione (detta "ingenua") nascono i primi problemi paradossali riguardanti logica e matematica: proprio mentre Frege si accingeva a pubblicare i suoi risultati il matematico e filosofo Bertrand Russell (1872-1970) enuncia quello che è universalmente noto come paradosso di Russell, che mina le basi della teoria di Cantor-Frege. Quest'ultima deve essere abbandonata e più tardi viene sostituita dalla teoria assiomatica degli insiemi, introdotta da Zermelo e perfezionata da Fraenkel.

Oggi la logica è lo strumento privilegiato per lo sviluppo della matematica, perché permette di procedere attraverso regole ben precise che assicurano la correttezza delle dimostrazioni.

C'è da dire, infine, che la logica, oltre a tutti i suoi utilizzi linguistici e matematici, presenta anche un aspetto "ludico". Utilizzando la logica è possibile dare vita ad un numero elevatissimo di indovinelli e giochi che, stuzzicando la mente, rendono questa disciplina più facilmente avvicinabile da tutti. E, forse, anche più divertente.

Qualche paradosso

- **Il paradosso del mentitore. E' questo il più celebre dei paradossi, quello che ha conosciuto maggiore fortuna nella storia del pensiero, impegnando per la sua soluzione una numerosa schiera di filosofi e logici. La formulazione più vicina a quella originale di Eubulide sembra quella tramandataci da Cicerone:**

  Se dici che menti e in ciò dici il vero, menti o dici la verità?

***La sua forma più semplice*. Assai semplicemente esso può venire espresso con l'asserto: "questo enunciato è falso". E' l'enunciato vero o falso?**

***Il paradosso del postino*. Il postino prende la posta per tutti coloro che non se la prendono da soli ed ovviamente non prende la posta per tutti coloro che la prendono da soli. Ma allora chi prende la posta del postino? Se è lo stesso postino che prende la posta, allora ne deriva che egli non prende la posta per se; se invece non la prende, allora si presume che egli la prende.**

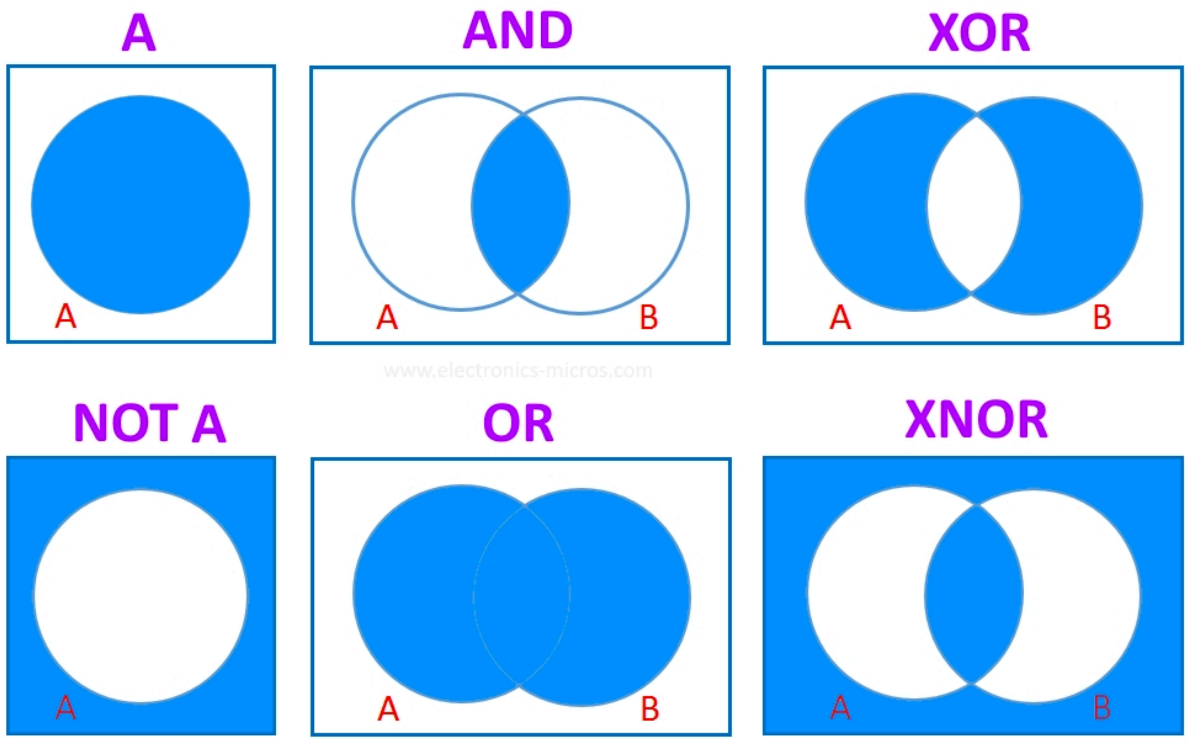
***Il paradosso del barbiere*. Presentato da Russell, è del tutto simile a quello del postino. Il barbiere fa la barba a tutti coloro che non la fanno da sé. Chi fa la barba al barbiere?**

Chi è

Boole, George: nasce il 2 novembre 1815 a Lincoln (Lincolnshire, Gran Bretagna). George Boole muore nel 1864 a Ballintemple (County Cork, Irlanda).

ALGEBRA DI BOOLE

L'algebra di Boole è un sistema algebrico per formalizzare la sillogistica aristotelica mediante una logica delle classi.



Essa fu interpretata dallo stesso autore anche come una struttura di relazioni logiche tra proposizioni, mostrando così le affinità profonde esistenti tra la logica e l'usuale algebra.

Cosa ha fatto

Sviluppò assieme ad Auguste De Morgan la logica matematica moderna e il metodo simbolico. Boole e De Morgan costruirono l'algebra della logica (o algebrea booleana), staccando la logica dalla filosofia (Logica Aristotelica) e legandola alla matematica.

Cosa serve la sua teoria

Boole ha voluto sviluppare una logica basata su due simboli, mentre per esempio la matematica si basa su un sistema di dieci cifre, per sviluppare la logica con il minor numero di simboli possibili. Solo nel secolo successivo questa logica assolutamente astratta e speculativa è stata impiegata nella costruzione dei primi computer.

Funzione booleana

In matematica, una **funzione booleana** è una funzione

$$F(b_1, b_2, \dots, b_n)$$

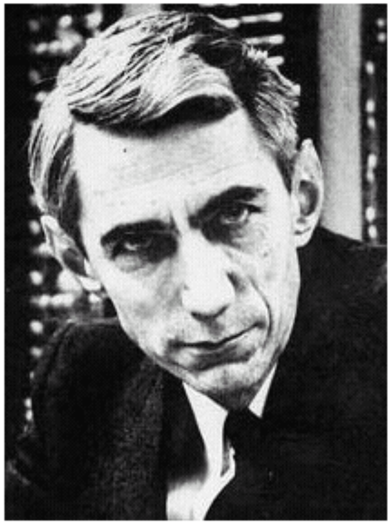
di un numero n di variabili booleane b_i che assumono valori nello spazio booleano **B** = {0, 1}, cosi come F assume valori in **B**. Con un insieme di n variabili esistono   funzioni possibili. Le funzioni booleane sono inoltre importanti poiché sono isomorfe ai circiuti digitali cioè un circuito digitale può essere espresso tramite un'espressione booleana e viceversa, esse dunque svolgono un ruolo chiave nel progetto dei circuiti digitali, ma trovano anche applicazione nella crittografia e nelle telecomunicazioni.

Funzioni booleane

Le funzioni booleane fondamentali sono la AND (solitamente indicata con il segno meno: -), la OR (solitamente indicata con il segno più: +) e la NOT (solitamente indicata con il segno ¬); dalla combinazione delle funzioni boolene fondamentali si ottengono tutte le altre possibili funzioni. Poiché le variabili possono assumere solo i valori 0 o 1 una funzione booleana con n variabili di input ha solo 2^n combinazioni possibili e può essere descritta dando una tabella, detta tabella di verità, con 2^n righe.

info

L’algebra di Boole è rimasta pressoché ignorata per oltre 80 anni, cioè fino al 1937, quando lo scienziato americano **Claude Elwood Shannon** propose per primo di applicarla all’analisi e alla sintesi di circuiti a relè, che sono caratterizzati dai due stati di funzionamento “aperto” e “chiuso”.



Da allora l’algebra di Boole viene impiegata per la progettazione dei circuiti elettronici di tutti i computer.

L'algebra booleana originaria era definita su un insieme costituito da due elementi (successivamente è stata generalizzata per insiemi costituiti da un numero di elementi uguale a una qualsiasi potenza del 2), che a seconda dei casi vengono chiamati **`vero`**, **`falso`**.

Per esempio, nel calcolo proposizionale si usano come elementi di partenza delle proposizioni semplici, a ciascuna delle quali si possa attribuire in modo univoco il valore di verità **`vero`** o **`falso`**.

Per esempio:

"5 è un numero dispari"

ha valore **`vero`**, mentre

"5 è un numero pari"

ha valore **`falso`**.

Una proposizione semplice suscettibile di assumere i due soli valori, **`vero`** o **`falso`** si dice *variabile booleana* o *di commutazione*.

Nel seguito indicheremo le variabili booleane con le lettere **`x`**, **`y`**, e i loro valori di verità con **`v`**, **`f`** *.

Unendo più proposizioni tramite nessi logici si formano proposizioni complesse, il cui valore di verità è ricavabile in maniera puramente formale dai valori delle proposizioni costituenti.

* Si consideri, in generale, la seguente tabella

Valore	Simboli alternativi
vero	1 - true - ON - SI - YES
falso	0 - false - OFF - NO

Operatori `AND` (`&&`), `OR` (`||`), `NOT` (`!`)

Le operazioni più semplici che si possono compiere sulle proposizioni sono:

a) *congiunzione*, tramite il connettivo "e". Esempio:

"5 è un numero dispari **e** 6 è un numero pari"

b) *disgiunzione*, tramite il connettivo "o". Esempio:

"5 è un numero dispari **o** 6 è un numero pari"

c) *negazione*, tramite l'avverbio "non". Esempio:

"5 **non** è un numero dispari".

A queste operazioni corrispondono rispettivamente gli operatori booleani **`AND`** (**`&&`**), **`OR`** (**`||`**), **`NOT`** (**`!`**) così definiti:

AND (&&) produce una variabile con valore **v** se e solo se collega due variabili entrambe con valore **v**, cioè:

```
f && f = f
f && v = f
v && f = f
v && v = v
```

OR (||) produce una variabile con valore **v** se collega due variabili di cui una almeno abbia valore **v**, cioè:

```
f || f = f
f || v = v
v || f = v
v || v = v
```

NOT (**!**) produce una variabile con valore **v** se anteposto a una variabile con valore **f**, e una con valore **f** se anteposto a una **v**, cioè:

```
!v = f
!f = v
```

In particolare,

- **`AND`** e **`OR`** collegano tra loro due variabili e sono detti perciò operatori *binari* o *diadici*;
- **`NOT`** opera su una sola variabile ed è detto perciò operatore *unario* o *monadico*.

Tabelle di verità

Nell'applicare l'algebra di Boole ai circuiti elettronici si sostituisce spesso il valore `v` con `1` e il valore `f` con `0`. Perciò i tre operatori booleani visti in precedenza possono essere descritti anche con le seguenti *tabelle di verità*:

AND (&&)

x	y	x&&y
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

OR (||)

x	y	x||y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

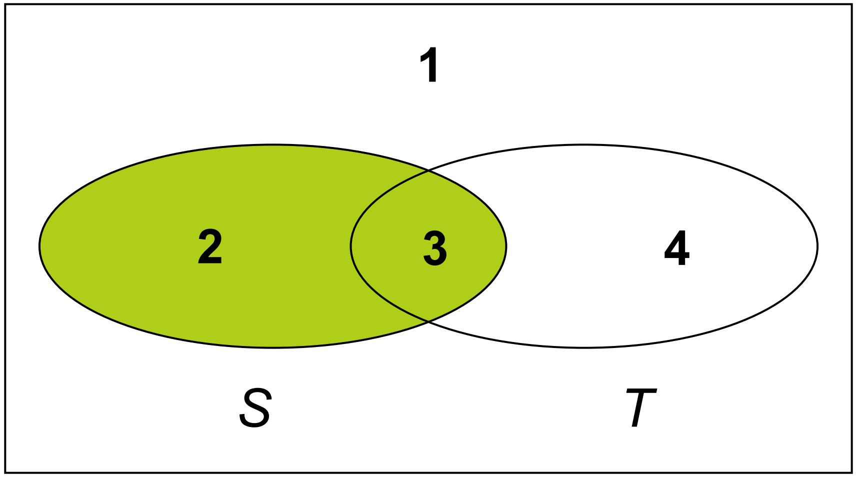
NOT (!)

x	!x
0	1
1	0

In esse le righe corrispondono a tutte le possibili combinazioni dei valori di verità delle variabili booleane, e le colonne corrispondono alle variabili booleane e al valore dell'espressione risultante.

In effetti, esiste una stretta somiglianza tra le tabelle di verità e i diagrammi di Venn impiegati nelle operazioni tra insiemi.

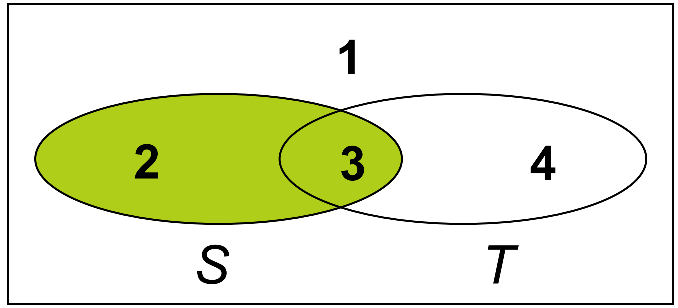
Per esempio, la figura seguente è un diagramma di Venn che mostra due insiemi, *S* e *T*, ognuno rappresentato da un'ellisse.



I due insiemi potrebbero rappresentare, rispettivamente:

- *S* l'insieme delle persone di questa aula con i capelli castani
- *T* l'insieme delle persone di questa aula con gli occhi azzurri

Come si vede, le due ellissi dividono il piano in 4 regioni, numerate da 1 a 4:



1. la regione 1 rappresenta gli elementi che non appartengono né a *S* né a *T*, cioè le persone che non hanno né i capelli castani né gli occhi azzurri

2. la regione 2 rappresenta la differenza *S*-*T*, cioè le persone che hanno i capelli castani e non gli occhi azzurri

3. la regione 3 rappresenta l'intersezione (∩) di *S* e *T*, cioè le persone con capelli castani e occhi azzurri

4. la regione 4 rappresenta la differenza *T*-*S*, cioè le persone che hanno gli occhi azzurri e non i capelli castani

5. le regioni 2, 3 e 4 rappresentano l'unione (∪) di *S* e *T*, cioè le persone con capelli castani o con occhi azzurri.

Perciò l'operazione di congiunzione (**AND**) sui valori di verità corrisponde alla intersezione (∩) tra insiemi, la disgiunzione (**OR**) corrisponde alla unione e la negazione (**NOT**) alla complementazione (¯).

Algebra di Boole			**Teoria degli insiemi**	
Operatore	operazione	simbolo	Operazione	simbolo
AND	congiunzione	∧ (&& nel C)	intersezione (prodotto)	∩ (·)
OR	disgiunzione	∨ (|| nel C)	unione (somma)	∪ (+)
NOT	negazione	¬ (! nel C)	complemento	~ (¯)

Gli operatori **AND**, **OR**, **NOT** godono di due importanti proprietà, note come *teoremi di De Morgan*:

$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y} \quad ; \quad \overline{x+y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

che si possono dimostrare per *esaustione*, ossia scrivendo le tavole della verità dei due termini e osservando che sono uguali per tutte le possibili combinazioni dei valori assunti dalle variabili **x**, **y**.

Per esempio, per la prima si avrebbe:

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$x \cdot y$	$\overline{x \cdot y}$	$\overline{x}+\overline{y}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Operatore `OR` esclusivo `XOR` (^)

L'operatore di disgiunzione **`OR`** necessita di alcuni chiarimenti, dato che la lingua italiana usa il connettivo "o" con due significati diversi.

Consideriamo come esempio le seguenti frasi:

a) "l'insalata si condisce con olio o con aceto"
b) "verrò con il bus o con il tram"

nel caso a) il fatto di condire l'insalata con olio non esclude la possibilità di condirla con aceto, e la "o" ha un valore *inclusivo*;

nel caso b) una modalità di spostamento esclude l'altra, e la "o" ha valore *esclusivo*.

Per distinguere il caso a) dal caso b) è allora opportuno considerare, accanto all'operatore **`OR`** visto in precedenza - che d'ora in poi chiameremo, più propriamente, **`OR`** *inclusivo* - un operatore detto **`OR`** *esclusivo* o **`XOR`**, di simbolo **`^`**, che *produce una proposizione vera se una e soltanto una delle proposizioni che collega risulta vera*.

Dato che produce il risultato **`1`** quando collega due variabili con valori di verità diversi, **`XOR`** è detto anche *operatore di anticoincidenza*.

La tavola di verità di **`XOR`** è pertanto la seguente:

x	y	x&&y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Osservazione. Se confrontiamo la precedente tavola di verità dell'operatore **`XOR`** con quella dell'espressione

$$\bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y}$$

che si ricava con la seguente tabella:

x	y	$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{x} \cdot y$	$x \cdot \overline{y}$	$\overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y}$
1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	0	0

vediamo che esse sono identiche. Vale pertanto l'identità:

$$x \wedge y = \overline{x} \cdot y + x \cdot \overline{y}$$

che ci dice che:

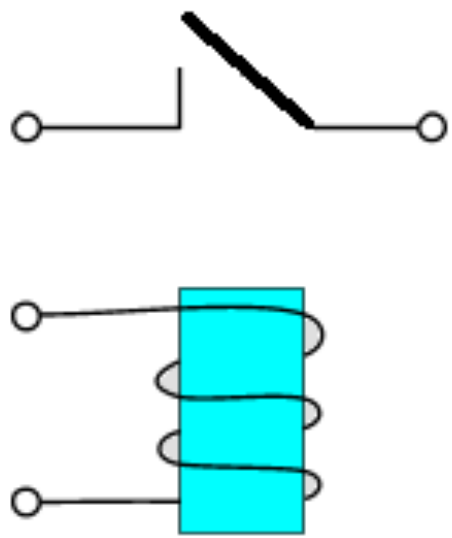
__XOR__ può essere sostituito connettendo in modo opportuno gli operatori __AND__, __OR__, __NOT__.

Pertanto **XOR** è un operatore *composto*.

Porte logiche

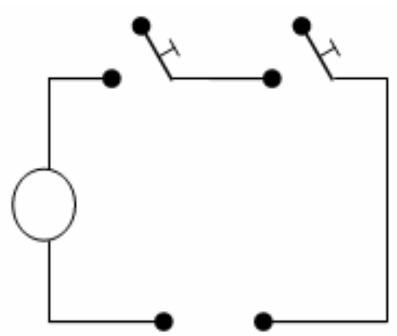
Come accennato, gran parte dell'importanza dell'algebra di Boole deriva dal fatto che essa trova applicazione nella teoria dei circuiti elettrici, in quanto è possibile realizzare dei dispositivi fisici abbastanza semplici che funzionano secondo le sue regole.

Tali dispositivi, che si chiamano *porte logiche* o *gate*, si potrebbero realizzare in linea di principio con dei semplici interruttori comandati da relé: ogni interruttore si trova normalmente nello stato di aperto (in cui cioè non fa passare corrente), e viene chiuso fornendo una tensione opportuna (*di soglia*) al proprio relè.



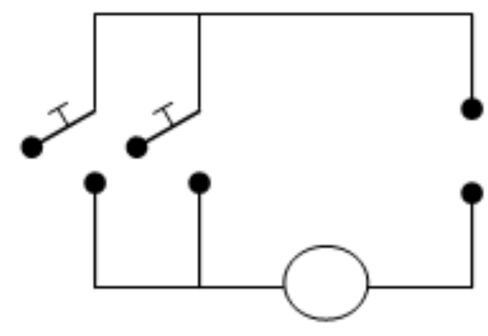
L'interruttore è inserito in un circuito comprendente un generatore che eroga la stessa tensione; questa corrisponde alla variabile booleana `1` (o vero), mentre una tensione inferiore corrisponde alla variabile `0` (o falso).

Se colleghiamo due di questi interruttori **in serie** con il generatore otteniamo un circuito equivalente all'operatore **`AND`**.



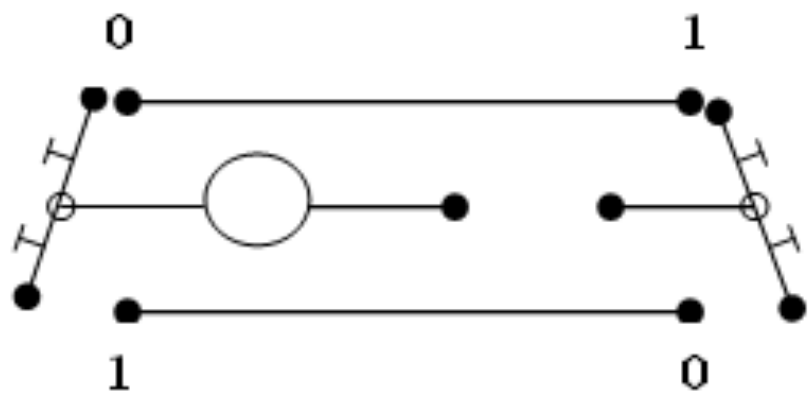
Infatti questo circuito fornisce in uscita la tensione `1` se e solo se entrambe le tensioni applicate ai due relè agli ingressi hanno valore `1` (e quindi fanno chiudere i corrispondenti interruttori).

In alternativa, si possono collegare due interruttori **in parallelo** con un generatore, ottenendosi l'equivalente dell'operatore `OR`. Infatti adesso sarà presente la tensione `1` in uscita se almeno una delle due tensioni in ingresso assume il valore `1`.



Se invece si realizza un interruttore che sia chiuso quando non si fornisce la tensione di soglia al suo relè, e aperto quando si fornisce tale tensione, esso costituisce l'equivalente dell'operatore **`NOT`**.

Anche l'operatore **`XOR`** può essere realizzato con un semplice circuito, collegando due interruttori a due vie (o deviatori) a un generatore, come indicato in figura.



Si vede infatti che se gli stati dei due deviatori sono diversi (come in figura, dove quello di sinistra vale `0` e quello di destra `1`) ai capi del circuito si verifica una tensione, in caso contrario no.

In maniera analoga si potrebbero realizzare con interruttori dei circuiti equivalenti agli operatori **`NAND`** e **`NOR`** che vedremo più avanti.

Di fatto, gli attuali computer utilizzano porte logiche costituite da transistori a effetto di campo a metallo-ossido semiconduttore (in inglese: Metal-Oxide Semiconductor Field Effect Transistor, o **MOSFET**).

Un transistore MOSFET può lavorare in tre modi: *cut-off* (funziona come un interruttore aperto), *zona triodo* (funziona come un resistore) e *saturazione* (funziona come un amplificatore).

Le porte sono realizzate in circuiti integrati, costruiti secondo una delle tecnologie pMOS, nMOS o cMOS.

La logica **pMOS** realizza circuiti nei quali la corrente è trasportata da "buche" o "vacanze di elettroni", che si comportano come cariche elettriche positive. E' la più economica, ma anche la più lenta delle tre.

La logica **nMOS** realizza circuiti nei quali la corrente è trasportata da elettroni. Sebbene sia semplice da progettare e realizzare, essa presenta alcuni seri svantaggi:

Risorse e Riferimenti:

- Il materiale di questa lezione è stato assemblato utilizzzando le seguenti risorse disponili online:
  - http://www.dii.unisi.it/~monica/arezzo/Lezione1_1011.ppt
  - http://www.uniroma2.it/didattica/fondaminf/deposito/Fonda2.ppt
  - www.istitutomaserati.it/startrekking/progetto%20startrekking/Casazza.ppt
  - xoomer.virgilio.it/.../Matematica.../Logica%20delle%20proposizioni-%2...